

---

Compte-rendu du TP1 d'Equations aux  
Derivées Partielles

---

Céline CATTOËN  
Ranveig WALLACE

## Introduction

Le but de ce TP est de résoudre le problème de la poutre en traction-compression par une méthode qui a initié la méthode des éléments finis. Le problème elliptique étudié est le suivant :

$$(1) \begin{cases} -(EAu')' + cu = F \\ EAu'(L) + ku(L) = 0 \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad \text{où } u \text{ est fonction de la variable d'espace } x \in [0; L]$$

On va discrétiser le problème sur un nombre fini de poutres puis on comparera la solution approchée à la solution exacte du problème.

## 1 Calcul de la solution exacte :

On souhaite calculer la solution exacte dans le cas suivant, avec  $c = 0$ ,

$$EA = \begin{cases} a_0, & \text{pour } 0 < x < L/2 \\ a_1, & \text{pour } L/2 < x < L \end{cases} \quad F = \begin{cases} a_0 \frac{4\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right), & \text{pour } 0 < x < L/2 \\ 0, & \text{pour } L/2 < x < L \end{cases}$$

où  $a_0$  et  $a_1$  sont deux constantes  $> 0$  données.

### 1.1 Déplacement :

On calcule dans un premier temps la solution  $u(x)$  en fonction de  $u(\frac{L}{2})$  pour  $0 < x < \frac{L}{2}$  et en fonction de  $u(\frac{L}{2})$  et de  $u(L)$  pour  $\frac{L}{2} < x < L$ .

$$u(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \frac{2}{L}u\left(\frac{L}{2}\right)x, & \text{pour } 0 < x < \frac{L}{2} \\ \left(\frac{u(L)-u\left(\frac{L}{2}\right)}{\frac{L}{2}}\right)\left(x - \frac{L}{2}\right) + u\left(\frac{L}{2}\right), & \text{pour } \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

Les coefficients  $u(\frac{L}{2})$  et de  $u(L)$  peuvent être calculés grâce aux conditions de continuité:

- sur  $u$ .
- sur  $EAu'$ .

On obtient alors un système de deux équations d'inconnues  $u(\frac{L}{2})$  et  $u(L)$  que l'on résout avec matlab pour ensuite tracer la solution exacte.

Partant de l'équation  $EAu'(L) + ku(L) = 0$  sur l'intervalle  $\frac{L}{2} < x < L$  et de l'égalité suivante  $a_1u'(L) = a_1u'(\frac{L}{2}) = a_0u'(\frac{L}{2})$  justifiée par le fait que  $\forall x \in \frac{L}{2} < x < L$   $u'(x) = c^{te}$ , on établit les deux équations du système :

$$\begin{cases} a_0u'(\frac{L}{2}) + ku(L) = 0 \\ a_1u'(\frac{L}{2}) + ku(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ku(L) + \frac{2a_0}{L}u(\frac{L}{2}) = \frac{2\pi a_0}{L} \\ \left(\frac{2a_1}{L} + k\right)u(L) - \frac{2a_1}{L}u(\frac{L}{2}) = 0 \end{cases}$$

### 1.2 Efforts internes d'élasticité :

Les efforts internes d'élasticité correspondent à  $EAu'$ . La solution exacte est donnée par :

$$EAu'(x) = \begin{cases} \frac{2\pi}{L} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \frac{2\pi a_0}{L} - \frac{a_0ku(L)}{a_1}, & \text{pour } 0 < x < L/2 \\ -ku(L), & \text{pour } L/2 < x < L, \end{cases}$$

## 2 Calcul de la solution approchée par la méthode des éléments finis :

On cherche à approcher la solution exacte du problème posé par une solution discrétisée obtenue à l'aide de la résolution d'un système linéaire. On coupe la poutre en  $N - 1$  poutres élémentaires, de sommets  $x_i$  et  $x_{i+1}$ , et on suppose que chaque poutre élémentaire a une section constante ainsi qu'une composition homogène. Dans le problème discrétisé, on peut donc dire que  $(EA)_i$  est constant pour chaque poutre élémentaire.

Pour discrétiser le problème, on suppose également que la densité de force  $F_i$  est constante pour chaque poutre et on la réduit à deux forces équivalentes appliquées aux extrémités de la poutre :  $\frac{F_i L_i}{2}$  au noeud  $x_i$  et  $\frac{F_i L_i}{2}$  au noeud  $x_{i+1}$ .

Sur la poutre  $i$ , les forces d'élasticité exercées au point  $x_i$  par la poutre  $i - 1$  sont de la forme  $(EA)_{i-1}(u^{i-1})' = (EA)_{i-1} \frac{u_i - u_{i-1}}{L_{i-1}}$  et les forces exercées par la poutre  $i + 1$  au point  $x_{i+1}$  sont  $(EA)_i(u^i)' = (EA)_i \frac{u_{i+1} - u_i}{L_i}$ . C'est une égalité stricte car on suppose  $u$  linéaire sur chaque poutre.

Le problème discrétisé se réduit alors à trouver le déplacement  $u$  aux points  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ . On a vu en TD que cette discrétisation nous amène au système linéaire suivant :

$$Au = b$$

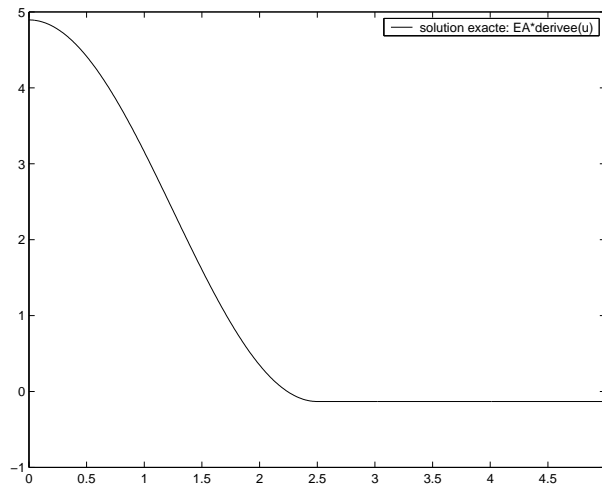
avec

$$A = \begin{pmatrix} \frac{(EA)_0}{L_0} + \frac{(EA)_1}{L_1} & -\frac{(EA)_1}{L_1} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{(EA)_1}{L_1} & \frac{(EA)_1}{L_1} + \frac{(EA)_2}{L_2} & -\frac{(EA)_2}{L_2} & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & -\frac{(EA)_{N-1}}{L_{N-1}} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{(EA)_{N-1}}{L_{N-1}} & \frac{(EA)_{N-1}}{L_{N-1}} + k \end{pmatrix}$$

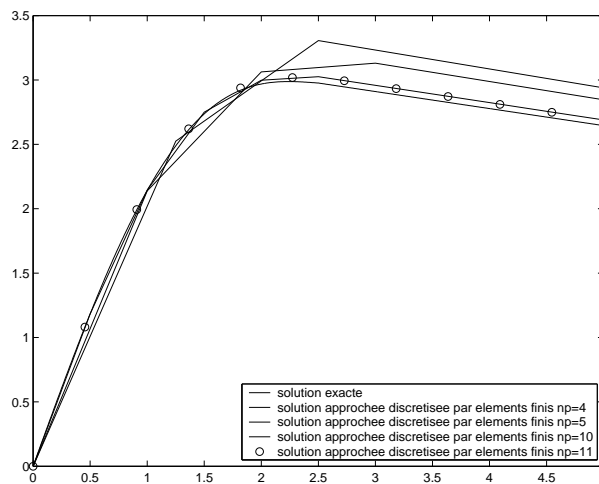
et

$$b = \begin{pmatrix} \frac{F_0 L_0 + F_1 L_1}{2} \\ \dots \\ \dots \\ \frac{F_{N-2} L_{N-2} + F_{N-1} L_{N-1}}{2} \\ \frac{F_{N-1} L_{N-1}}{2} \end{pmatrix}$$

### 3 Résultats et comparaisons :



Solution exacte des forces d'élasticité



Solution exacte du déplacement et solutions approchées

On remarque que les solutions approchées tendent assez vite vers la solution exacte quand le nombre de poutres augmente. Pour  $N = 11$  la solution approchée semble recouvrir la solution exacte.

### 4 Calcul d'erreurs :

#### 4.1 Erreur à l'encastrement :

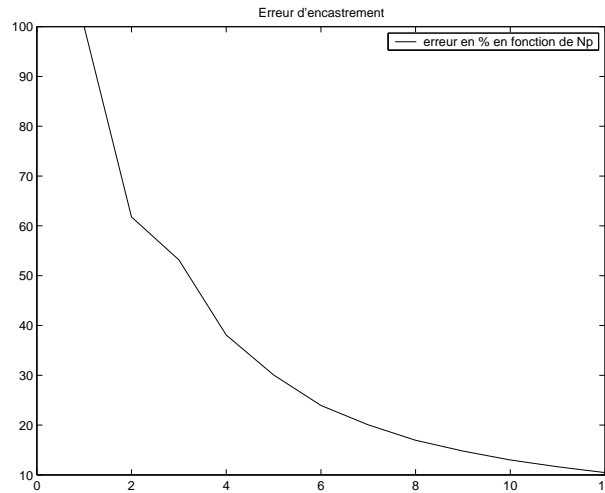
La réaction à l'encastrement est donnée par  $R = -EAu'(0)$  d'après le TD1 exercice 1. On évalue l'erreur à l'encastrement en calculant  $u'(0)$  par différence finie grâce à la solution exacte du déplacement puis en l'approximant grâce à la solution approchée par éléments finis. L'erreur en pourcentage est alors déterminée par :

$$erreur = 100 \times \left| \frac{R_{exacte} - R_{app}}{R_{exacte}} \right|$$

Erreur d'encastrement en fonction du nombre de poutres :

Np	3	4	5	6	10	11	12
Erreur en %	53.18	38.08	30.08	23.94	12.99	11.62	10.47

En traçant les erreurs en fonction du nombre de poutres variant de 1 à 12 on obtient la droite décroissante suivante :



Erreur d'encastrement exprimée en % en fonction du nombre de poutres

L'erreur diminue lorsqu'on augmente le nombre de poutres de manière régulière même pour le passage d'un nombre pair à un nombre impair de poutres. L'erreur semble converger vers 0 car pour  $Np = 1000$  on a  $erreur = 0.099\%$ .

#### 4.2 Erreur en norme $L^2$ sur le déplacement et sur les forces élastiques :

La norme  $L^2$  est définie par :  $\|f\|_{L^2} = \sqrt{\int_{\Omega} f^2 d\Omega}$ .

Pour déterminer les intégrales sur chaque poutre, on utilise la formule du point milieu :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = h \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}$$

L'erreur en pourcentage en norme  $L^2$  est alors déterminée par une somme de formules de points milieu :

$$\left\| \frac{U_{exacte} - U_{app}}{U_{exacte}} \right\|_{L^2}^2 = \left( \sum_{i=1}^{N-1} \frac{h_i}{2} \left[ \left( \frac{U_{exacte}(x_{i+1}) - U_{app}(x_{i+1})}{U_{exacte}(x_{i+1})} \right)^2 + \left( \frac{U_{exacte}(x_i) - U_{app}(x_i)}{U_{exacte}(x_i)} \right)^2 \right] \right)$$

On calcule cette erreur relative sur le déplacement  $U$  et sur les forces élastiques  $EAU'$  pour  $Np = 4$  à 10 par pas de 2, puis pour  $Np = 3$  à 11 par pas de 2. Les erreurs exprimées en % sont représentées dans le tableau suivant :

Np	4	6	8	10
Erreur en % sur le déplacement	9.7169	4.0523	2.2312	1.4141
Erreur en % sur les forces d'élasticité	34.8896	26.8691	20.3420	15.9502

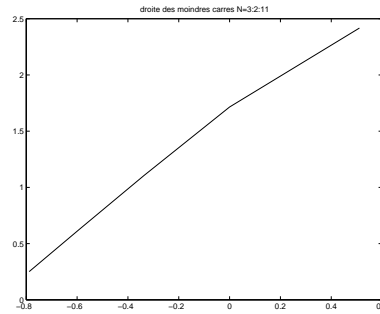
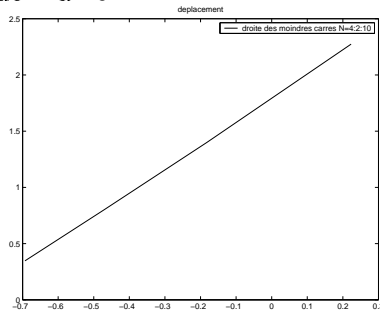
Np	3	5	7	9	11
Erreur en % sur le déplacement	11.2120	5.5559	3.0233	1.8828	1.2854
Erreur en % sur les forces d'élasticité	53.6304	30.5856	22.9901	17.7216	14.1141

Pour observer l'influence de la parité des poutres sur l'erreur relative, on détermine les taux de convergences en traçant les droites au sens des moindres carrés :

$$\left(\log\left(\frac{L}{Np}\right), \log(\text{erreur})\right)$$

Np varie de	4 à 10	3 à 11
Pente pour le déplacement	2.1043	1.6763
Pente pour les forces d'élasticité	0.8508	1.0098

La figure suivante représente la droite des moindres carrés pour le déplacement  $Np$  variant de 4 à 10 :



Pente des moindres carrés pour N pair    Pente des moindres carrés pour N impair

### 4.3 Commentaires :

La vitesse de convergence est quadratique dans le cas du déplacement pour un nombre de poutres paire. Dans le cas d'un nombre impair l'erreur relative en norme  $L^2$  converge avec une vitesse de 1.65 qui n'est plus quadratique. En effet, le découpage de poutres en un nombre impair de poutres élémentaires ne respecte plus les discontinuités des données. Ainsi,  $(EA)_i$  et  $F_i$  ne sont plus constantes sur la poutre élémentaires qui contient la discontinuité.

Quand aux valeurs aux noeuds, on arrive à des valeurs exactes si le nombre de poutres élémentaires est paire. Ceci est dû au fait que le problème discrétisé est une condensation exacte du problème initial aux noeuds. C'est la continuité par morceaux de  $EA$  et  $F$  qui nous assure cette exactitude. De plus, si la matrice  $A$  et le vecteur  $b$  sont évalués d'une manière exacte, c'est à dire qu'on a ici un nombre de poutres pair, alors le système linéaire est exact par rapport au problème discrétisé.

Par contre si le nombre de poutres élémentaires est impair, on est obligé de faire une approximation de  $A$  et de  $b$  pour la poutre contenant la discrétisation. Quand on inverse  $A$  pendant la résolution du système linéaire, l'erreur se propage sur toutes les valeurs de  $u$  et la solution trouvée n'est plus exacte aux noeuds.

En ce qui concerne l'erreur relative sur les forces d'élasticité on observe que la parité des poutres élémentaires ne semble pas influencer autant que pour l'erreur sur le déplacement. Les contraintes ont donc une vitesse de convergence qui tende vers 1.

## Conclusion

Il ressort de l'étude de la méthode présentée que l'on a plutôt intérêt à prendre en compte les discontinuités des données lorsque l'on découpe la poutre initiale. De même,

la théorie des éléments finis précise qu'en dimension 1, il faut toujours avoir un maillage compatible avec les discontinuités des fonctions-coefficients de l'EDP.

Enfin, cette méthode n'est pas complètement satisfaisante si on s'intéresse aux efforts des contraintes pour une rupture de matériau par exemple, car la convergence est plus rapide sur les déplacements (ordre 2) que sur les contraintes (ordre 1).